

PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 03

TRANSFORMATĂ FOURIER DISCRETĂ, FFT

Cristian Rusu

DATA TRECUTĂ

- clarificări despre funcții continue, discrete și eșantionare
- numere complexe, formula lui Euler
- corelația între semnale
 - discrete
 - continue
- transformatele Fourier

CUPRINS

- **transformata Fourier discretă**
- **perspectiva dinspre informatică**
- **transformata Fourier rapidă**

TRANSFORMATĂ FOURIER DISCRETĂ

- ni se dă un vector \mathbf{x} , de dimensiune n
- Transformata Fourier Discretă:
 - componenta Fourier 0 = (exponențiala complexă 0)^T \mathbf{x}
 - componenta Fourier 1 = (exponențiala complexă 1)^T \mathbf{x}
 - ...
 - componenta Fourier $n - 1$ = (exponențiala complexă $n - 1$)^T \mathbf{x}
- formula pentru componenta Fourier m

$$X[m] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] e^{-2\pi j k \frac{m}{n}} \text{ pentru } m = 0, \dots, n - 1$$

TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ

- formula pentru componenta Fourier m

$$X[m] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] e^{-2\pi j k \frac{m}{n}} \text{ pentru } m = 0, \dots, n-1$$

- transformata inversă

$$x[k] = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X[m] e^{2\pi j k \frac{m}{n}} \text{ pentru } k = 0, \dots, n-1$$

faptul că transformata Fourier are semnul minus este o convenție
ideea este ca transformata directă și inversă să aibă semne diferite

EXEMPLU DFT

- când $n = 4$ avem $k, m \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$X[m] = \sum_{k=0}^3 x[k] [\cos(2\pi mk/4) - j \sin(2\pi mk/4)]$$

- care sunt cele 4 componente ale DFT?

$$X[0] = x[0] \left[\cos(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot k} / 4) - j \sin(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot k} / 4) \right]$$

$$+ x[1] [\cos(2\pi 0 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 1/4)]$$

$$+ x[2] [\cos(2\pi 0 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 2/4)]$$

$$+ x[3] [\cos(2\pi 0 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 3/4)]$$

$$= ?$$

EXEMPLU DFT

- când $n = 4$ avem $k, m \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$X[m] = \sum_{k=0}^3 x[k] [\cos(2\pi mk/4) - j \sin(2\pi mk/4)]$$

- care sunt cele 4 componente ale DFT?

$$\begin{aligned} X[0] &= x[0] \left[\cos(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot k} / 4) - j \sin(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot k} / 4) \right] \\ &\quad + x[1] [\cos(2\pi 0 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 1/4)] \\ &\quad + x[2] [\cos(2\pi 0 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 2/4)] \\ &\quad + x[3] [\cos(2\pi 0 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 3/4)] \\ &= x[0] + x[1] + x[2] + x[3] \end{aligned}$$

EXEMPLU DFT

- celelalte componente:

$$\begin{aligned} X[1] &= x[0][\cos(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot k} / 4) - j \sin(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot k} / 4)] \\ &\quad + x[1][\cos(2\pi 1 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 1/4)] \\ &\quad + x[2][\cos(2\pi 1 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 2/4)] \\ &\quad + x[3][\cos(2\pi 1 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 3/4)] \\ X[2] &= x[0][\cos(2\pi 2 \cdot 0/4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 0/4)] \\ &\quad + x[1][\cos(2\pi 2 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 1/4)] \\ &\quad + x[2][\cos(2\pi 2 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 2/4)] \\ &\quad + x[3][\cos(2\pi 2 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 3/4)] \\ X[3] &= x[0][\cos(2\pi 3 \cdot 0/4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 0/4)] \\ &\quad + x[1][\cos(2\pi 3 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 1/4)] \\ &\quad + x[2][\cos(2\pi 3 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 2/4)] \\ &\quad + x[3][\cos(2\pi 3 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 3/4)] \end{aligned}$$

EXEMPLU DFT

- forma matriceală

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi j 0 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 0 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 0 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 0 \cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 1 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 2 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 3 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 3/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

EXEMPLU DFT

- forma matriceală

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi j 0 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 0 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 0 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 0 \cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 1 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 2 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 3 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 3/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

- o simplificare

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi j 1 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 3/4} \\ 1 & e^{-2\pi j 2 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 3/4} \\ 1 & e^{-2\pi j 3 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 3/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X} \qquad \qquad \qquad \mathbf{F} \qquad \qquad \qquad \mathbf{X}$

- forma compactă: $\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$, \mathbf{F} se numește **matricea Fourier**

EXEMPLU DFT

- forma matriceală

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi j 0 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 0 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 0 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 0 \cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 1 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 1 \cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 2 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 2 \cdot 3/4} \\ e^{-2\pi j 3 \cdot 0/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 1/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 2/4} & e^{-2\pi j 3 \cdot 3/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

- o simplificare

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X} \qquad \qquad \mathbf{F} \qquad \qquad \mathbf{x}$

- forma compactă: $\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$, \mathbf{F} se numește **matricea Fourier**

AL DOILEA EXEMPLU DFT

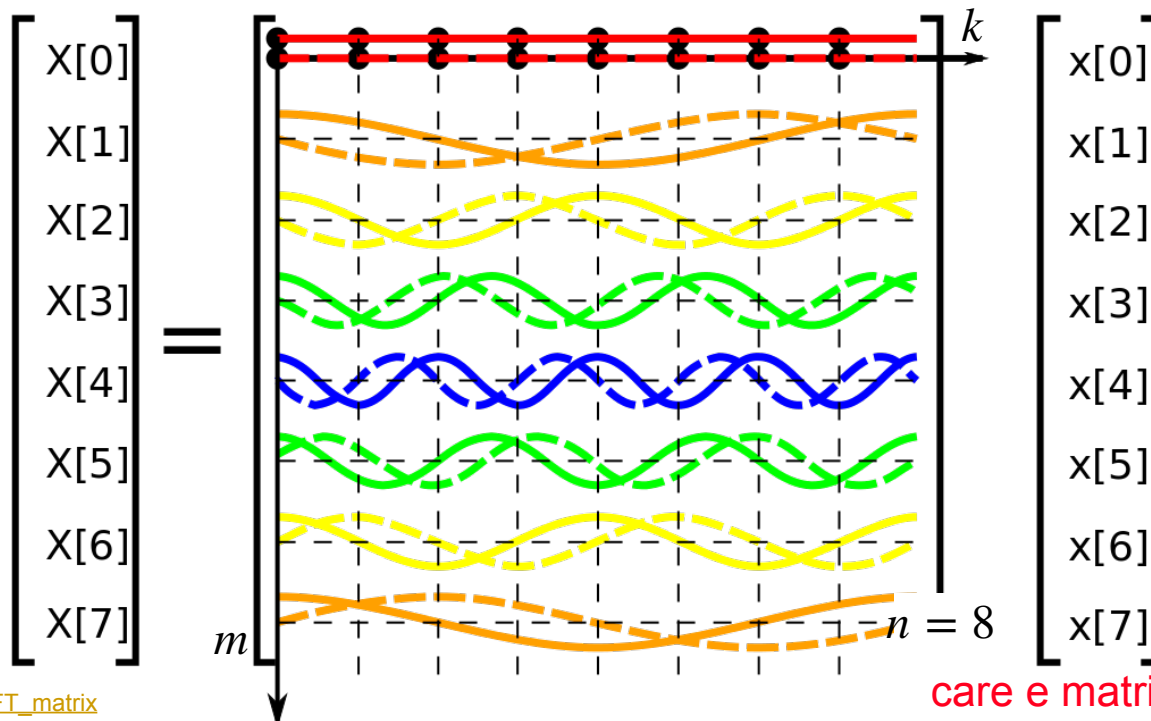
- matricea Fourier este câteodată scalată (fie cu $\frac{1}{n}$ și atunci prima componentă e chiar media semnalului \mathbf{x} , fie cu $\frac{1}{\sqrt{n}}$ și atunci matricea este ortonormală: $\mathbf{F}^H \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{F}^H = \mathbf{I}_n$)

- pentru $n = 8$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & j & \frac{1+j}{\sqrt{2}} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & j & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-j}{\sqrt{2}} & j & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & \frac{1+j}{\sqrt{2}} & j & \frac{-1+j}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-j}{\sqrt{2}} & -j & \frac{1-j}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

AL DOILEA EXEMPLU DFT

- matricea Fourier este câteodată scalată (fie cu $\frac{1}{n}$ și atunci prima componentă e chiar media semnalului x , fie cu $\frac{1}{\sqrt{n}}$ și atunci matricea este ortonormală: $\mathbf{F}^H \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{F}^H = \mathbf{I}_n$)
- pentru $n = 8$ (unde de mai jos sunt artificial “netede”)



care e matricea Fourier 2×2 ?

TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ

- ce înseamnă elementele din $X[m]$?
- Transformata Fourier Discretă:
 - componenta Fourier 0 = (exponențiala complexă 0)^T \mathbf{x}
 - componenta Fourier 1 = (exponențiala complexă 1)^T \mathbf{x}
 - ...
 - componenta Fourier $n - 1$ = (exponențiala complexă $n - 1$)^T \mathbf{x}
- care este frecvența pe care o măsoară componenta m ?

TRANSFORMATĂ FOURIER DISCRETĂ

- pentru un semnal continuu eșantionat cu 500 eșantioane pe secundă asupra căruia se aplică DFT în 16 puncte avem frecvența fundamentală:

$$f = \frac{f_s}{n} = \frac{500}{16} = 31.25Hz$$

- frecvențele analizate sunt:

$X[0]$ reprezintă $0 \cdot 31.25 = 0Hz$ (prima componentă în frecvență)

$X[1]$ reprezintă $1 \cdot 31.25 = 31,25Hz$ (a doua componentă în frecvență)

$X[2]$ reprezintă $2 \cdot 31.25 = 62,5Hz$ (a treia componentă în frecvență)

$X[3]$ reprezintă $3 \cdot 31.25 = 93,75Hz$ (a patra componentă în frecvență)

⋮

$X[15]$ reprezintă $15 \cdot 31.25 = 468,75Hz$ (a 16-a componentă în frecvență)

CALCUL DFT

- vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x_{in}(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

- vom avea nevoie de 8 componente în frecvență și alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000Hz$

- atunci frecvențele analizate sunt:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \dots, 7kHz\}$$

- transformata Fourier discretă este

$$X[m] = \sum_{k=0}^7 x[k] [\cos(2\pi mk/8) + j \sin(2\pi mk/8)]$$

CALCUL DFT

- cele 8 eșantioane în timp:

$$x[0] = 0.3535$$

$$x[1] = 0.3535$$

$$x[2] = 0.6464$$

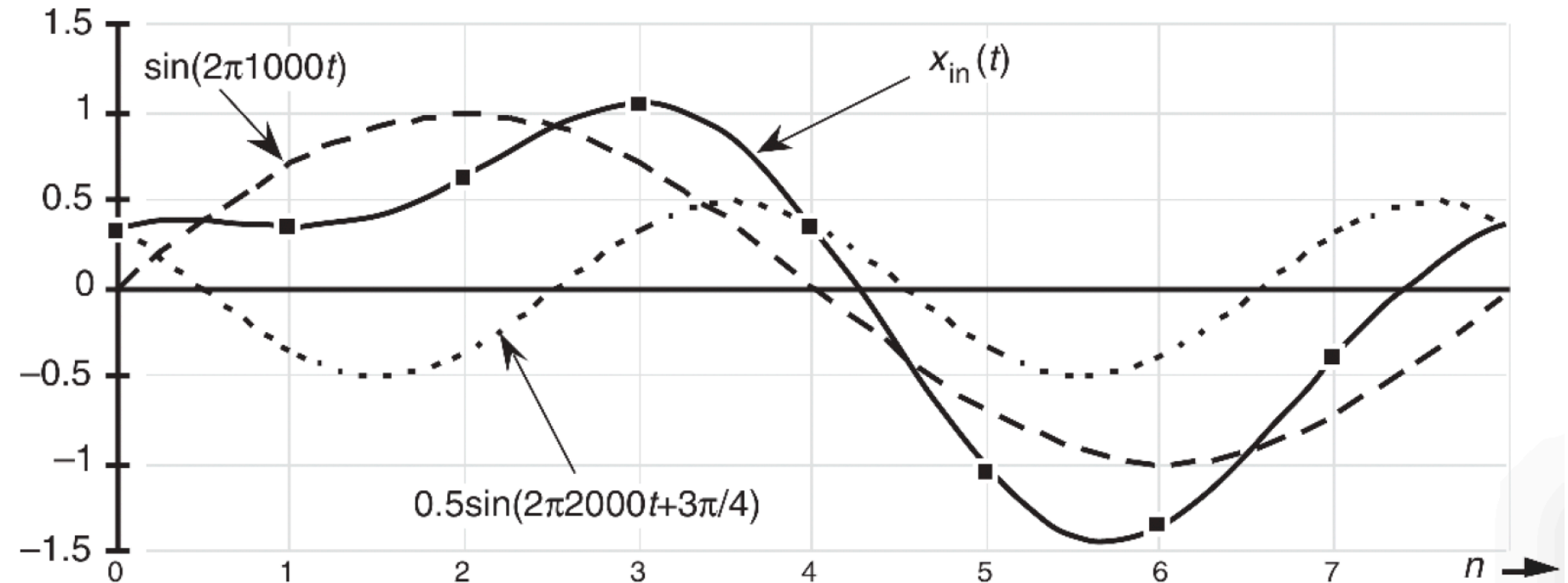
$$x[3] = 1.0607$$

$$x[4] = 0.3535$$

$$x[5] = -1.0607$$

$$x[6] = -1.3535$$

$$x[7] = -0.3535$$



Sursă: (Lyons04_udsp)

pe acest grafic timpul este eșantionat
care este timpul "real"?

CALCUL DFT

- cele 8 eșantioane în timp:

$$x[0] = 0.3535$$

$$x[1] = 0.3535$$

$$x[2] = 0.6464$$

$$x[3] = 1.0607$$

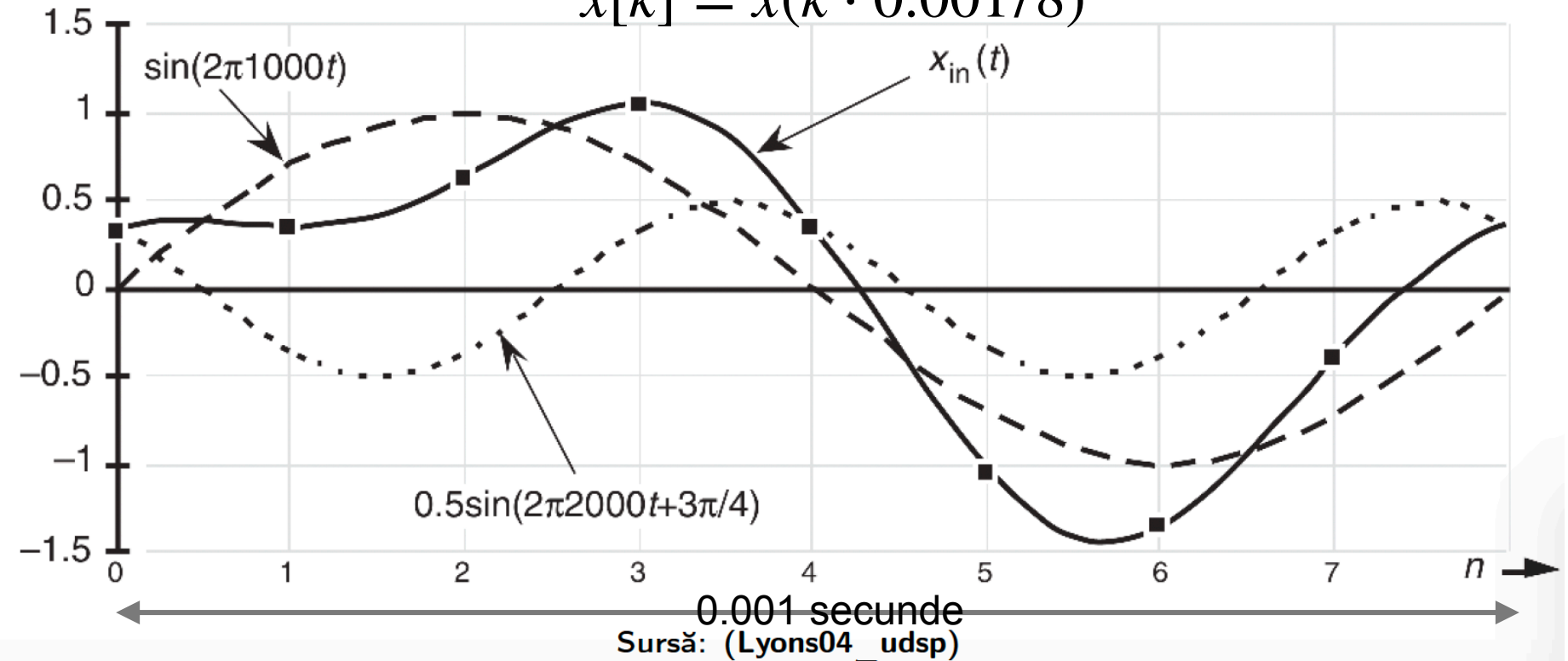
$$x[4] = 0.3535$$

$$x[5] = -1.0607$$

$$x[6] = -1.3535$$

$$x[7] = -0.3535$$

$$x[k] = x(k \cdot 0.001/8)$$



CALCUL DFT

- **componentele Fourier sunt:**

$$X[1] = 0.0 - j4.0$$

$$X[2] = 1.414 + j1.414$$

$$X[3] = 0.0 + j0.0$$

$$X[4] = 0.0 + j0.0$$

$$X[5] = 0.0 + j0.0$$

$$X[6] = 1.414 - j1.414$$

$$X[7] = 0.0 + j4.0$$

- **cât sunt valorile absolute ale componentelor?**
- **cât este $X[0]$?**
- **ce relație observați între componente?**

CALCUL DFT

- **componentele Fourier sunt:**

$$X[1] = 0.0 - j4.0 \quad \mathbf{abs}(X[1]) = 4$$

$$X[2] = 1.414 + j1.414 \quad \mathbf{abs}(X[2]) = 2$$

$$X[3] = 0.0 + j0.0 \quad \mathbf{abs}(X[3]) = 0$$

$$X[4] = 0.0 + j0.0 \quad \mathbf{abs}(X[4]) = 0$$

$$X[5] = 0.0 + j0.0 \quad \mathbf{abs}(X[5]) = 0$$

$$X[6] = 1.414 - j1.414 \quad \mathbf{abs}(X[6]) = 2$$

$$X[7] = 0.0 + j4.0 \quad \mathbf{abs}(X[7]) = 4$$

- **cât sunt valorile absolute ale componentelor?**
- **cât este $X[0]$?**
- **ce relație observați între componente?**

CALCUL DFT

- ce se întâmplă acum dacă avem:

$$x_{in}(t) = \sin(2\pi \cdot 1500 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

- din nou cu 8 componente în frecvență și alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000Hz$

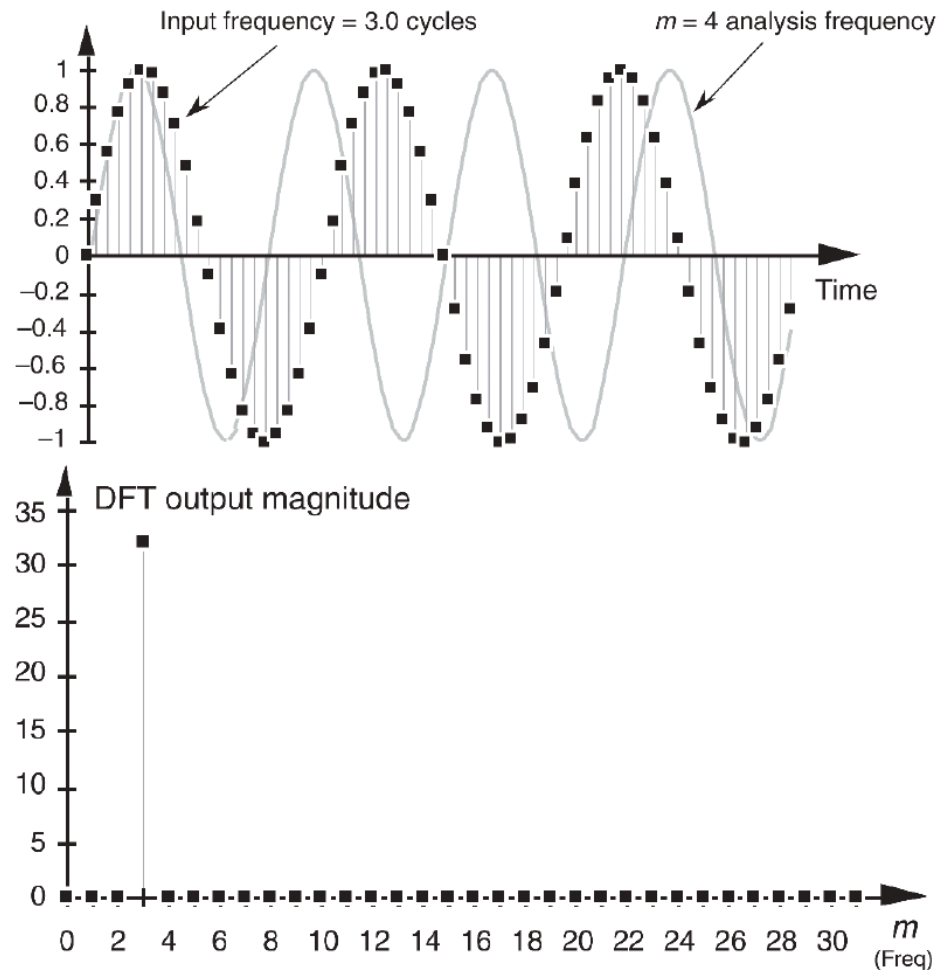
- atunci frecvențele analizate sunt:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \dots, 7kHz\}$$

- **1500Hz nu mai apare printre frecvențele analizate**

CALCUL DFT

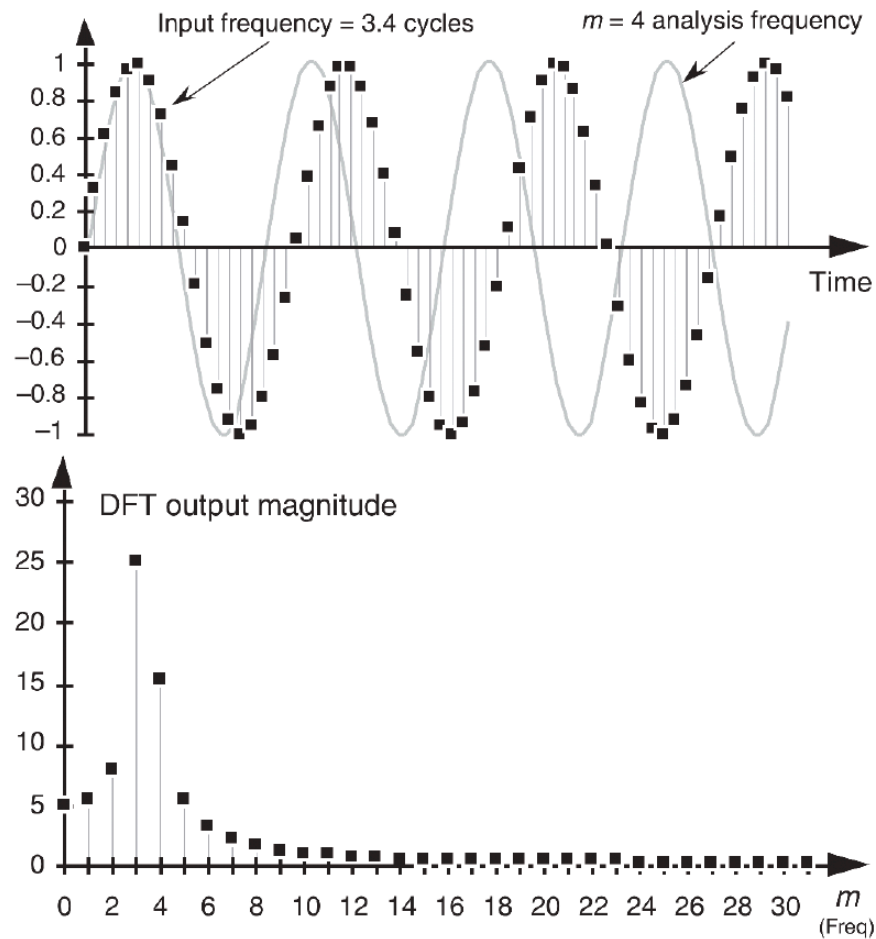
- 1500Hz nu mai apare printre frecvențele analizate
- apare fenomenul de leakage



Sursă: (Lyons04_udsp)

CALCUL DFT

- 1500Hz nu mai apare printre frecvențele analizate
- apare fenomenul de leakage



Sursă: (Lyons04_udsp)

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **perspectiva din informatică**
- **reprezentările polinoamelor**
- **operații cu polinoame**
- **operația de convoluție**
- **un algoritm divide and conquer pentru transformata Fourier**
- **transformata Fourier rapidă (Fast Fourier Transform)**

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- se dă un polinom:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \\ &= [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n-1}] \end{aligned}$$

- $n - 1$ se numește gradului polinomului
- a_k se numesc coeficienți
- exemplu: $P(x) = \frac{1}{2} + 2x - 3x^2 + \pi x^3$

TRANSFORMATATA FOURIER RAPIDĂ

- se dă un polinom:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^{n-1} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (x - r_k) \end{aligned}$$

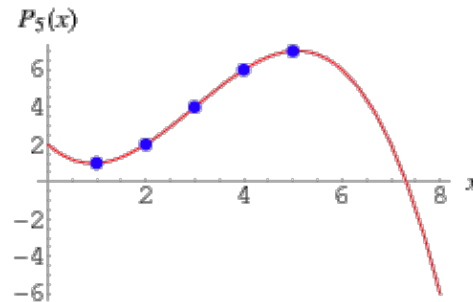
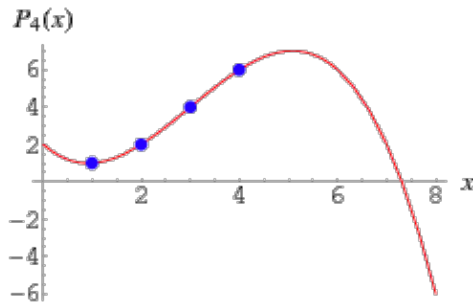
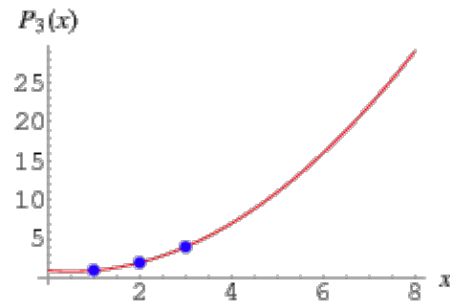
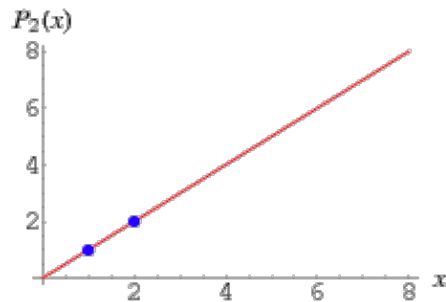
- r_k se numesc rădăcinile polinomului
- exemplu: $P(x) = 2 - 2x - x^2 + 2x^3 = (x - 1)(x^2 - 2)$
iar soluțiile sunt: $r_0 = 1, r_{1,2} = \pm \sqrt{2}$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- se dă un polinom:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

- polinomul are n grade de libertate (coeficienții)
- acestea sunt descrise unic de către n constrângeri diferite
- exemple:



TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- se dă un polinom:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

- **polinomul are n grade de libertate (coeficienții)**
- **exemplu: $P(x) = 1 + 2x + 2x^2$**
 - **pentru $x_1 = 0$, $y_1 = P(x_1) = 2$**
 - **pentru $x_2 = 1$, $y_2 = P(x_2) = 5$**
 - **pentru $x_3 = -1$, $y_3 = P(x_3) = 1$**
- **deci, punctele sunt $(0, 2)$, $(1, 5)$ și $(-1, 1)$**

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

- reprezentarea polinoamelor:

1. coeficienți

2. rădăcini

3. puncte pe grafic (eșantioane)

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

- operații cu polinoame:
- evaluarea la un punct
 - se dă un punct x_0
 - evaluăm $y_0 = P(x_0)$
- adunarea a două polinoame

- se dau $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ și $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$

- se calculează $R(x) = P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + b_k) x^k$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- operații cu polinoame:
- înmulțirea a două polinoame

- se dau $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ și $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$

- se calculează

$$R(x) = P(x) \times Q(x) = \sum_{k=0}^{2(n-1)} c_k x^k, \text{ unde } c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

- exemplu $P(x) = 1 + 2x + 3x^2$ și $Q(x) = 1 - 2x - x^2$ și rezultă $R(x) = 1 - 2x^2 - 8x^3 - 3x^4$

câte operații avem nevoie pentru a calcula $R(x)$?

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- operații cu polinoame:
- înmulțirea a două polinoame

- se dau $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ și $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$

- se calculează

$$R(x) = P(x) \times Q(x) = \sum_{k=0}^{2(n-1)} c_k x^k, \text{ unde } c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

- exemplu $P(x) = 1 + 2x + 3x^2$ și $Q(x) = 1 - 2x - x^2$ și rezultă $R(x) = 1 - 2x^2 - 8x^3 - 3x^4$

câte operații avem nevoie pentru a calcula $R(x)$? $O(n^2)$

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

- operații cu polinoame:
- înmulțirea a două polinoame
 - se calculează

$$R(x) = P(x) \times Q(x) = \sum_{k=0}^{2(n-1)} c_k x^k, \text{ unde } c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

- operația este una de convoluție
- convoluția se poate realiza în $O(n \log n)$ operații

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- Rezumat

	coeficienți	rădăcini	eșantioane
evaluare	$O(n)$	$O(n)$	$O(n^2)$
adunare	$O(n)$	dificil	$O(n)$
înmulțire	$O(n^2)$	$O(n)$	$O(n)$

obiectivul: vrem înmulțirea în coeficienți să ia mai puțin de $O(n^2)$

ideea: transformăm din coeficienți în eșantioane și acolo e ușor să înmulțim, apoi ne întoarcem înapoi la coeficienți

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- e mult mai ușor să facem înmulțirea dacă avem eșantioane
- deci, dacă avem coeficienți vrem să trecem la eșantioane
- avem puncte x_0, x_1, \dots, x_{n-1}
- vrem să calculăm $y_0 = P(x_0), y_1 = P(x_1), \dots, y_{n-1} = P(x_{n-1})$

$$\begin{array}{c} \updownarrow n \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \\ \leftarrow n \end{array}$$

$$\mathbf{V}\mathbf{a} = \mathbf{y}$$

dar înmulțirea matrice-vector $\mathbf{V}\mathbf{a}$ necesită $O(n^2)$ operații

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- e mult mai ușor să facem înmulțirea dacă avem eșantioane
- deci, dacă avem coeficienți vrem să trecem la eșantioane
- avem puncte x_0, x_1, \dots, x_{n-1}
- vrem să calculăm $y_0 = P(x_0), y_1 = P(x_1), \dots, y_{n-1} = P(x_{n-1})$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ n \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \\ \leftarrow n \end{array}$$

$$\mathbf{V}\mathbf{a} = \mathbf{y}$$

dar înmulțirea matrice-vector $\mathbf{V}\mathbf{a}$ necesită $O(n^2)$ operații

dar, noi putem
alege punctele x_k

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

- cum să alegem punctele x_k astfel încât V să fie rapid?
- un algoritm divide and conquer
 - vrem să calculăm $P(x)$, $x \in \mathbb{X}$
 1. divide
 2. conquer
 3. combine

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

- cum să alegem punctele x_k astfel încât $\forall a$ să fie rapid?
- un algoritm divide and conquer
- vrem să calculăm $P(x)$, $x \in \mathbb{X}$

1. divide

$$P_{\text{par}}(x) = \sum_{k=0}^{\lceil n/2-1 \rceil} a_{2k} x^k = [a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad \dots]$$

$$P_{\text{impar}}(x) = \sum_{k=0}^{\lceil n/2-1 \rceil} a_{2k+1} x^k = [a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \dots]$$

2. combine

$$P(x) = P_{\text{par}}(\ ?) + P_{\text{impar}}(\ ?)$$

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

- cum să alegem punctele x_k astfel încât $\forall a$ să fie rapid?
- un algoritm divide and conquer
- vrem să calculăm $P(x)$, $x \in \mathbb{X}$

1. divide

$$P_{\text{par}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2-1} a_{2k} x^k = [a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad \dots]$$

$$P_{\text{impar}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} a_{2k+1} x^k = [a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \dots]$$

2. combine

$$P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + P_{\text{impar}}(?) \quad \text{am folosit faptul că } (x^2)^k = x^{2k}$$

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

- cum să alegem punctele x_k astfel încât $\forall a$ să fie rapid?
- un algoritm divide and conquer
- vrem să calculăm $P(x)$, $x \in \mathbb{X}$

1. divide

$$P_{\text{par}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2-1} a_{2k} x^k = [a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad \dots]$$

$$P_{\text{impar}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} a_{2k+1} x^k = [a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \dots]$$

2. combine

$$P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

- cum să alegem punctele x_k astfel încât $\forall a$ să fie rapid?
- un algoritm divide and conquer
 - vrem să calculăm $P(x)$, $x \in \mathbb{X}$

1. divide

$$P_{\text{par}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2-1} a_{2k}x^k = [a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad \dots]$$

$$P_{\text{impar}}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} a_{2k+1}x^k = [a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \dots]$$

2. combine

$$P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

3. conquer

calculează recursiv $P_{\text{par}}(y)$ și $P_{\text{impar}}(y)$ unde $y \in \mathbb{X}^2 = \{x^2 \mid x \in \mathbb{X}\}$

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

- OK, acum avem $P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{X}$
- ce am câștigat dacă am scris așa?
 - cele două subprobleme cu polinoame de dimensiune $n/2$
 - dar tot trebuie să evaluăm în \mathbb{X} puncte
 - deci recursia nu reduce complet dimensiunea problemei
- **soluția**: când trecem de la \mathbb{X} la \mathbb{X}^2 vrem ca dimensiunea (lungimea setului) să se micșoreze, adică $\mathbb{X} > \mathbb{X}^2$
- dacă gradului polinomului se înjumătățește, atunci vreau să înjumătățesc și dimensiunea setului, adică $\mathbb{X}^2 = \mathbb{X} / 2$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- OK, acum avem $P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{X}$
- **soluția:** când trecem de la \mathbb{X} la \mathbb{X}^2 vrem ca dimensiunea (lungimea setului) să se micșoreze, adică $\mathbb{X} > \mathbb{X}^2$
- dacă gradului polinomului se înjumătățește, atunci vreau să înjumătățesc și dimensiunea setului, adică $\mathbb{X}^2 = \mathbb{X} / 2$
- **exemple:**
 - $\mathbb{X} = 1$, atunci $\mathbb{X} = \{1\}$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- OK, acum avem $P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{X}$
- **soluția:** când trecem de la \mathbb{X} la \mathbb{X}^2 vrem ca dimensiunea (lungimea setului) să se micșoreze, adică $\mathbb{X} > \mathbb{X}^2$
- dacă gradului polinomului se înjumătățește, atunci vreau să înjumătățesc și dimensiunea setului, adică $\mathbb{X}^2 = \mathbb{X} / 2$
- **exemple:**
 - $\mathbb{X} = 1$, atunci $\mathbb{X} = \{1\}$
 - $\mathbb{X} = 2$, atunci $\mathbb{X} = \{-1, +1\}$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- OK, acum avem $P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{X}$
- **soluția:** când trecem de la \mathbb{X} la \mathbb{X}^2 vrem ca dimensiunea (lungimea setului) să se micșoreze, adică $\mathbb{X} > \mathbb{X}^2$
- dacă gradului polinomului se înjumătățește, atunci vreau să înjumătățesc și dimensiunea setului, adică $\mathbb{X}^2 = \mathbb{X} / 2$
- **exemple:**
 - $\mathbb{X} = 1$, atunci $\mathbb{X} = \{1\}$
 - $\mathbb{X} = 2$, atunci $\mathbb{X} = \{-1, +1\}$
 - $\mathbb{X} = 4$, atunci $\mathbb{X} = \{-1, +1, -i, i\}$
 - ...

deci? care e secretul? care e formula pentru elementele x_k ?

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- OK, acum avem $P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{X}$
- **soluția:** când trecem de la \mathbb{X} la \mathbb{X}^2 vrem ca dimensiunea (lungimea setului) să se micșoreze, adică $\mathbb{X} > \mathbb{X}^2$
- dacă gradului polinomului se înjumătățește, atunci vreau să înjumătățesc și dimensiunea setului, adică $\mathbb{X}^2 = \mathbb{X} / 2$
- **exemple:**
 - $\mathbb{X} = 1$, atunci $\mathbb{X} = \{1\}$
 - $\mathbb{X} = 2$, atunci $\mathbb{X} = \{-1, +1\}$
 - $\mathbb{X} = 4$, atunci $\mathbb{X} = \{-1, +1, -i, i\}$
 - ...

deci? care e secretul? care e formula pentru elementele x_k ? $x_k = \exp(2\pi jk/n)$

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

FFT = când calculăm produsul matrice-vector $\mathbf{V}\mathbf{a}$ dar elementele x_k din \mathbf{V} sunt rădăcini de ordin n a unității

în acest caz, \mathbf{V} se notează cu \mathbf{F} și se numește matricea Fourier

$$\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n/2} & \mathbf{D} \\ \mathbf{I}_{n/2} & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{n/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2), \forall x \in \{\text{rădăcini a unității}\}$$

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

FFT = când calculăm produsul matrice-vector Va dar elementele x_k din V sunt rădăcini de ordin n a unității

în acest caz, V se notează cu F și se numește matricea Fourier

$$F_n = \begin{bmatrix} I_{n/2} & D \\ I_{n/2} & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n/2} & 0 \\ 0 & F_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2), \quad \forall x \in \{\text{rădăcini a unității}\}$$

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

FFT = când calculăm produsul matrice-vector Va dar elementele x_k din V sunt rădăcini de ordin n a unității

în acest caz, V se notează cu F și se numește matricea Fourier

$$F_n = \begin{bmatrix} I_{n/2} & D \\ I_{n/2} & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n/2} & 0 \\ 0 & F_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2), \forall x \in \{\text{rădăcini a unității}\}$

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ

FFT = când calculăm produsul matrice-vector Va dar elementele x_k din V sunt rădăcini de ordin n a unității

în acest caz, V se notează cu F și se numește matricea Fourier

$$F_n = \begin{bmatrix} I_{n/2} & D \\ I_{n/2} & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n/2} & 0 \\ 0 & F_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

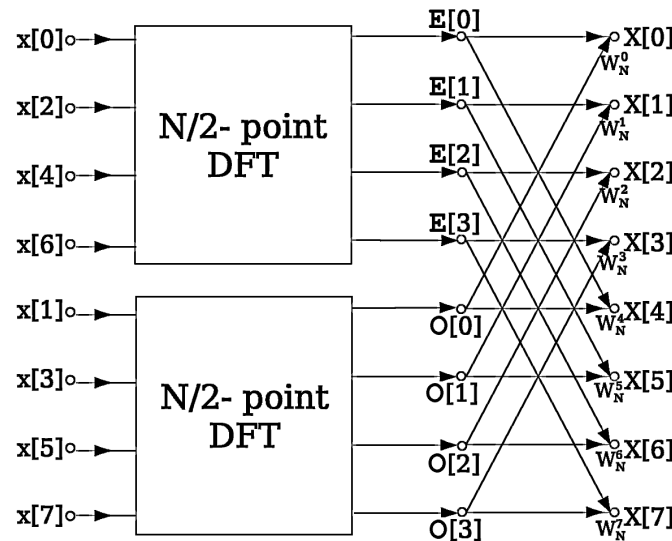
de ce apare D și $-D$? dacă
 $a \in \{\text{rădăcini a unității}\}$ atunci și
 $-a \in \{\text{rădăcini a unității}\}$

$$P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2), \quad \forall x \in \{\text{rădăcini a unității}\}$$

TRANSFORMATATA FOURIER RAPIDĂ

FFT = când calculăm produsul matrice-vector Va dar elementele x_k din V sunt rădăcini de ordin n a unității

în acest caz, V se notează cu F și se numește matricea Fourier



pentru că la fiecare pas dimensiunea problemei se înjumătățește, complexitatea totală este $O(n \log n)$

$$P(x) = P_{\text{par}}(x^2) + xP_{\text{impar}}(x^2), \quad \forall x \in \{\text{rădăcini a unității}\}$$

TRANSFORMATA FOURIER RAPIDĂ

- **calculul convoluției:**

- **X = FFT(P)** de la coeficienți mergem $O(n \log n)$
- **Y = FFT(Q)** la eșantioane
- **Z = XY** înmulțirea pe eșantioane $O(n)$
- **R = IFFT(Z)** de la eșantioane mergem $O(n \log n)$
înapoi la coeficienți

- **am obținut ce doream, convoluție în $O(n \log n)$**
 - **defapt este $2 \times O(n \log n) + O(n)$**

REFERINȚE

- **But what is the Fourier Transform? A visual introduction, 3Blue1Brown, Youtube**
- **Lecture 3 Divide and Conquer: Fast Fourier Transform, Design and Analysis of Algorithms, E. Demain, MIT**
- **Lecture 31: Fast Fourier Transform, Convolution, Computational Science and Engineering I, G. Strang, MIT**
- **The Fast Fourier Transform (FFT): Most Ingenious Algorithm Ever?, Reducible**
- **Complex Matrices; Fast Fourier Transform, G. Strang, MIT**
- **The Fast Fourier Transform Algorithm, Barry Van Veen**
- **Prelucrarea semnalelor, B. Dumitrescu, UPB (Capitolul 5.3)**

